

DOI: https://doi.org/10.52899/24141437_2025_04_XX

EDN: GFBEGD

УДК 629.12.011

Непризматические балочные конечные элементы для моделирования и расчетов рангоута парусных судов и яхт

А.В. Кульцеп¹, В.А. Манухин²

¹ ЦКТИ-ВИБРОСЕЙСМ, Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В статье предлагаются новые балочные конечные элементы с переменным поперечным сечением для моделирования непризматических участков рангоута парусных судов и яхт при расчетах общей прочности и устойчивости системы «мачта(ы) - стоячий такелаж».

Цель работы. Получить и привести в явном виде выражения для компонентов матриц жесткости и устойчивости конечных элементов с учетом и без учета поперечного сдвига при изгибе в двух главных плоскостях инерции, растяжении-сжатии и кручении.

Материалы и методы. Компоненты матриц получены вариационным методом и приведены для общего случая, когда моменты инерции и площадь поперечного сечения определенного вида аппроксимируются по длине элемента квадратичным полиномом, и для частных случаев при изгибе балки со сплошным круговым и кольцевым сечением, диаметр которого линейно изменяется по длине элемента.

Результаты. Приводятся результаты решения тестовых задач и сравнение с другими известными конечными элементами. Показана эффективность предлагаемых элементов при расчете непризматической безтакелажной мачты парусной яхты по сравнению с аналогичными призматическими элементами.

Заключение. Разработанный непризматический конечный эле-

мент *B4* включен в библиотеку программы FESTA (Finite Element Stability Analysis) и может быть использован при моделировании балочных элементов конструкций с различными поперечными сечениями. Элемент может использоваться не только для моделирования и расчетов сплошных и трубчатых элементов рангоута парусников, но и для моделирования непризматических рамных связей набора корпусов судов и кораблей.

Ключевые слова: конечный элемент; рангоут; матрица жесткости; матрица устойчивости; поперечное сечение; безтакелажная мачта; общая прочность и устойчивость.

КАК ЦИТИРОВАТЬ

Кульцеп А.В., Манухин В.А. Непризматические балочные конечные элементы для моделирования и расчетов рангоута парусных судов и яхт // Труды Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. 2025. Т. 4, № 4. С. X. DOI: 10.52899/24141437_2025_04_XX EDN: GFBEGD

Рукопись получена: 03.10.2025

Рукопись одобрена: 08.10.2025

Опубликована online: 31.10.2025

Non-prismatic beam finite elements for modeling and analysis of sailing ship and yacht rigging

Aleksander V. Kultsep¹, Vadim A. Manukhin²

¹ CKTI-VIBROSEISM, Saint Petersburg, Russia;

² St. Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia

ABSTRACT

Background: The article proposes new tapered beam finite elements for modeling non-prismatic mast sections of sailing vessels and yachts in the overall strength and stability analysis of the "mast(s) - standing rigging" system.

Aim: To obtain and present in an explicit form the expressions for the components of the stiffness and stability matrices of finite elements, taking into account and excluding transverse shear during bending in two principal planes of inertia, tension-compression, and torsion.

Methods: The matrix components are obtained by the variational method and are given for the general case when the moments of inertia and the cross-sectional area of a certain type are approximated by a quadratic polynomial along the length of the element, and for special cases when a beam with a continuous circular or annular cross-section is bent, with a diameter that varies linearly along the length of the element.

Results: The results of solving test problems and comparison with other known finite elements are presented. The efficiency of the proposed elements in calculating a non-prismatic mast of a sailing yacht without rigging is shown in comparison with similar prismatic elements.

Conclusion: The developed non-prismatic finite element B4 is included in the FESTA (Finite Element Stability Analysis) program library and can be used for modeling beam elements of structures with various cross-sections. The element can be used not only for modeling and calculating solid and tubular mast components of sailing vessels but also for modeling non-prismatic frame connections in the hull structures of ships.

Keywords: finite element; rigging; stiffness matrix; stability matrix; cross-section; un-stayed mast; overall strength and stability.

To cite this article

Kultsep AV, Manukhin VA. Non-prismatic beam finite elements for modeling and analysis of sailing ship and yacht rigging. *Transactions of the Saint Petersburg State Marine Technical University*. 2025;4(4):X-XX. DOI: 10.52899/24141437_2025_04_XX EDN: GFBEGD

Submitted: 03.10.2025

Accepted: 08.10.2025

Published online: 31.10.2025

ВВЕДЕНИЕ

Для постановки и несения парусов на судах и яхтах служит рангоут. К рангоуту относятся мачты, стеньги, реи, бушприт, утлегарь, гафели, гики и другие рангоутные «деревья», называемые так, поскольку традиционным материалом для рангоута являлась древесина хвойных пород. В настоящее время рангоут изготавливают помимо древесины из легких сплавов, стали и полимерно-композиционных материалов (ПКМ) – стеклопластика и углепластика. Для удержания рангоута в рабочем положении и несения некоторых парусов используется стоячий такелаж, включающий в себя ванты, штаги, фордуны и бакштаги. Для постановки, уборки и управления парусами и подвижным рангоутом служит бегучий такелаж – фалы, шкоты, брасы и др. Такелаж изготавливают из стальных, синтетических и растительных тросов. Совокупность рангоута, такелажа и парусов называют «парусным вооружением» [1], которое в конкретных случаях имеет свое наименование: фрегат, барк, бриг, бригантина, шхуна, шлюп, тендер, иол и др.

Рангоутные «деревья» представляют собой балки, поперечное сечение которых может быть круглым, овальным, сплошным или пустотелым. Мачты яхт в настоящее время имеют сложный тонкостенный профиль. Особенностью рангоута парусных судов является его непризматичность. К примеру, у мачт и стеньг размеры сечений уменьшаются от шпора к топу, у гиков, гафелей, бушприта и утлегаря уменьшение размеров наблюдается от пятки к ноку, у реев — от середины к нокам. На рис. 1 приведен чертеж грот-мачты реплики фрегата «Паллада», на котором хорошо видна ее непризматичность.

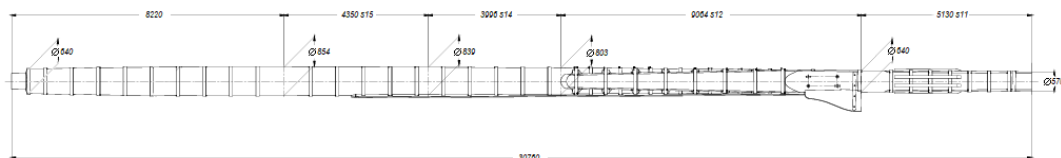


Рис. 1. Чертеж грот-мачты реплики фрегата «Паллада».

В технических условиях [2] указано, что, например, для стальной мачты с расчетной длиной 25 м при толщине стенки 11–12,5 мм диаметр у шпора должен быть равен 530 мм, у палубы – 700 мм, у салинга – 560 мм, у топа – 450 мм. Для стального рея длиной 20 м при толщине стенки 4–7 мм диаметр в середине рея должен быть равен 400 мм, на $1/4$, $1/2$, $3/4$ половины длины рея и у ноков соответственно 390, 360, 300 и 200 мм. Аналогичные требования приведены для стеньг, гиков, гафелей и бушпритов. Существенная непризматичность рангоута обусловлена, с одной стороны особенностью распределения нагрузки от парусов и такелажа, а с другой – необходимостью снижения веса и аэродинамического сопротивления.

У парусных яхт с топовым вооружением металлические мачты имеют, как правило, постоянное сечение по длине. У яхт с дробным вооружением типа $3/4$ и $7/8$ верхняя часть мачты зауживается, а у яхт с безтакелажными мачтами типа «Джонка» размеры сечения мачт изменяются по всей длине по указанным выше причинам. Мачты яхт из ПКМ имеют в зонах крепления стоячего такелажа и на наиболее нагруженных участках утолщенные стенки. Деревянные пустотелые мачты при топовом и дробном вооружении, а также при отсутствии стоячего такелажа имеют участки со сплошным сечением.

Проектирование мачт подразумевает выбор схемы стоячего такелажа под конкретный тип и размеры парусного вооружения яхты, выбор материала, формы и размеров поперечных сечений мачты, краспиц и тросов стоячего такелажа, конструирование узлов крепления к мачте такелажа и элементов рангоута. Расчеты прочности и устойчивости мачт должны учитывать трехмерность деформирования и базироваться на анализе пространственной модели «мачта(ы) – стоячий такелаж».

Следует отметить, что, несмотря на наличие официальных документов, отечественных правил и методик проектирования и расчетов прочности рангоута парусных судов и яхт фактически не существует. Например, в [3] для спортивных яхт в части 7 «Рангоут, такелаж и паруса» в п. 7.1.1 указано, что «рангоут и такелаж должны быть спроектированы и изготовлены в соответствии с хо-

рошей морской практикой и соответствовать району эксплуатации спортивного парусного судна». В связи с этим при проектировании парусных судов и яхт конструкторы ориентируются на зарубежные правила и стандарты [4–6], например, правила DNV, GL, ABS, PRS, стандарт ISO 12215 и др. Вместе с тем для проектирования и расчетов прочности и устойчивости сложной пространственной тросово-стержневой системы «мачта(ы) – стоячий такелаж» успешно используется разработанная авторами данной статьи методика и программное обеспечение, позволяющие определять как внешние расчетные и критические нагрузки на рангоут от парусов, так и напряженно-деформированное состояние (НДС) рангоута и стоячего такелажа. Дальнейшему развитию этой методики, позволяющей уточнить и упростить моделирование и расчет непризматического рангоута парусных судов и яхт, посвящена данная статья.

МЕТОДИКА РАСЧЕТНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАНГОУТА

В статье [7] авторами была изложена оригинальная методика, включающая компьютерные программы, уточняющие и автоматизирующие весь процесс проектно-проверочных расчетов общей и местной прочности и устойчивости пространственной системы «мачта(ы) – стоячий такелаж» парусных судов и яхт. Описание методики и примеры расчетов приводятся также в [8–12]. Методика включает в себя определение ветровых нагрузок и расчет прочности и устойчивости системы «мачта(ы) – стоячий такелаж». Ветровые нагрузки определяются для конкретной схемы и площади парусности судна и его курса относительно ветра в зависимости от устойчивости или заданной скорости ветра по программе MAST. Разработаны математические модели, описывающие работу бермудских, латинских и гафельных косых парусов, спинакера и генакера. Программой вычисляются распределенные и сосредоточенные нагрузки от парусов на рангоут, несущие паруса штаги и бегучий такелаж. Расчеты прочности и устойчивости системы «мачта(ы) – стоячий такелаж» выполняются конечно-элементным методом упругих решений при заданном прираще-

нии ветровой нагрузки на каждом шаге нагружения по программе FESTA [13]. На каждом шаге нагружения исключаются сжатые тросовые элементы, проверяется устойчивость системы и определяется ее НДС. В библиотеке конечных элементов имеется балочный призматический элемент *B2* с 12 степенями свободы и его редуцированный вариант *B1* для плоских моделей, конечные элементы тросов без и с поперечной нагрузкой, в которых возможен учет предварительного натяжения. В целях расширения возможностей методики разработана и введена в программу MAST математическая модель прямого паруса, в программе FESTA учтена возможность учета нелинейного деформирования тросов стоячего такелажа, а библиотека конечных элементов дополнена описываемым ниже непризматическим балочным элементом *B4*.

НЕПРИЗМАТИЧЕСКИЙ БАЛОЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ *B4*

Полная потенциальная энергия непризматической балки в общем случае складывается из энергии деформации изгиба и поперечного сдвига в двух плоскостях инерции балки, энергии деформации осевого растяжения-сжатия и кручения:

$$\Pi(u, v, w, \vartheta) = \Pi(u) + \Pi(v) + \Pi(w) + \Pi(\vartheta), \quad (1)$$

где

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^L EF(x) u'(x)^2 dx;$$

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_y(x) v''(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G\omega_y(x) v'_c(x)^2 dx + \frac{T}{2} \int_0^L v'(x)^2 dx - \int_0^L q_y(x) v(x) dx;$$

$$\Pi(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^L GJ_0(x) \vartheta'(x)^2 dx;$$

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_z(x) w''(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G\omega_z(x) w'_c(x)^2 dx + \frac{T}{2} \int_0^L w'(x)^2 dx - \int_0^L q_z(x) w(x) dx;$$

$u(x), v(x), w(x)$ — функции продольного и изгибных перемещений оси балки по осям x, y, z соответственно; $\vartheta(x)$ — функция угла закручивания балки вокруг оси x ; $v_c(x), w_c(x)$ — функции перемещений оси балки от сдвига по осям y, z соответственно; L — длина балки; E, G — модули упругости и сдвига материала балки; $J_y(x), J_z(x)$ — моменты инерции поперечного сечения

балки при изгибе в плоскостях инерции xoy и xoz соответственно; $\omega_y(x), \omega_z(x)$ — площади поперечного сечения балки, сопротивляющиеся сдвигу при изгибе в плоскостях инерции xoy и xoz соответственно; $F(x)$ — полная площадь поперечного сечения балки; $J_0(x)$ — момент инерции поперечного сечения при кручении балки вокруг оси x ; T — продольное усилие в балке, положительное при ее растяжении; $q_y(x), q_z(x)$ — интенсивности поперечной распределенной нагрузки в плоскостях xoy и xoz соответственно, положительные при действии в положительном направлении осей y и z .

Поскольку для относительно длинных элементов рангоута при их изгибе влияние поперечного сдвига мало, деформации сдвига будем учитывать приближенно. Согласно [14] можно положить

$$v'_c(x) = -k_y v''''(x), \quad w'_c(x) = -k_z w''''(x), \quad (2)$$

где $k_y = EJ_{y0}/G\omega_{y0}$, $k_z = EJ_{z0}/G\omega_{z0}$ — относительные жесткости балки, вычисленные в середине ее пролета.

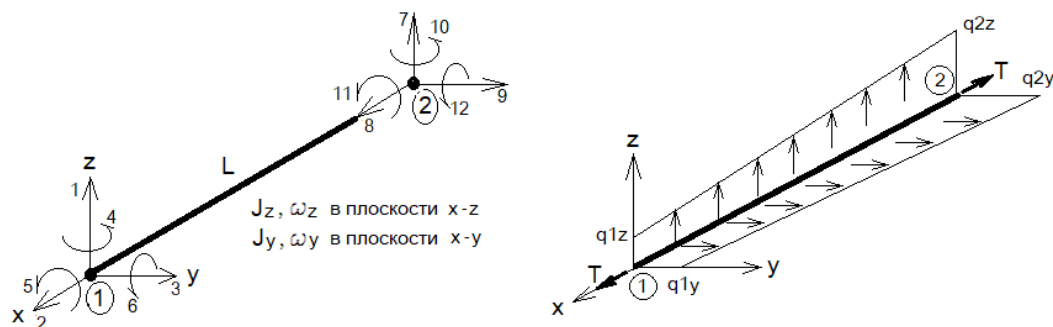


Рис. 2. Оси координат, узлы, узловые перемещения и нагрузка.

Принимая для функций перемещений и угла закручивания аппроксимации через узловые перемещения d_i , $i = 1 \dots 12$ в соответствии с [14] и рис. 2 в виде:

$$u(x) = f_2(x)d_2 + f_8(x)d_8, \quad (3)$$

$$\vartheta(x) = f_5(x)d_5 + f_{11}(x)d_{11}, \quad (4)$$

$$v(x) = f_3(x)d_3 + f_4(x)d_4 + f_9(x)d_9 + f_{10}(x)d_{10}, \quad (5)$$

$$w(x) = f_1(x)d_1 + f_6(x)d_4 + f_7(x)d_7 + f_{12}(x)d_{12}, \quad (6)$$

где

$$f_1(x) = s_z[1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 + 6\beta_z];$$

$$f_2(x) = f_5(x) = 1 - x/L;$$

$$f_3(x) = s_y[1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 + 6\beta_y];$$

$$f_4(x) = -s_yL[(x/L)/s_y - 2(x/L)^2(1 + 3\beta_y) + (x/L)^3 - 4\beta_y - 12\beta_y^2];$$

$$f_6(x) = s_zL[(x/L)/s_z - 2(x/L)^2(1 + 3\beta_z) + (x/L)^3 - 4\beta_z - 12\beta_z^2];$$

$$f_7(x) = s_z(3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 + 6\beta_z);$$

$$f_8(x) = f_{11}(x) = x/L;$$

$$f_9(x) = s_y(3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 + 6\beta_y);$$

$$f_{10}(x) = -s_yL[(x/L)^2(6\beta_y - 1) + (x/L)^3 - 2\beta_y + 12\beta_y^2];$$

$$f_{12}(x) = s_zL[(x/L)^2(6\beta_z - 1) + (x/L)^3 - 2\beta_z + 12\beta_z^2];$$

$$\beta_z = k_z/L^2; \quad \beta_y = k_y/L^2; \quad s_z = 1/(1 + 12\beta_z); \quad s_y = 1/(1 + 12\beta_y)$$

и далее, подставляя их в (1), с учетом выражений (2) получим

$$\Pi(d_1 \dots d_{12}) = \{d\}^T [K] \{d\} - \{d\}^T \{P\}, \quad (7)$$

где $[K]$ — матрица жесткости КЭ с учетом влияния сдвига и продольной силы, $\{P\}$ — вектор узловой нагрузки.

Компоненты матрицы $[K]$ и вектора $\{P\}$ вычисляются по формулам (8)–(13) при указанном сочетании индексов i и j . При других сочетаниях компоненты равны нулю. Функции $\bar{f}_i(x)$ соответствуют функциям $f_i(x)$ при $\beta_z = \beta_y = 0$ и $s_z = s_y = 1$.

$$K_{ij} = \int_0^L [EJ_z(x)f_i''(x)f_j''(x) + k_z^2 G\omega_z(x)f_i'''(x)f_j'''(x)dx + T\bar{f}_i'(x)\bar{f}_j'(x)] dx \quad i, j = 1, 6, 7, 12, \quad (8)$$

$$K_{ij} = \int_0^L [EJ_y(x)f_i''(x)f_j''(x) + k_y^2 G\omega_y(x)f_i'''(x)f_j'''(x)dx + T\bar{f}_i'(x)\bar{f}_j'(x)] dx \quad i, j = 3, 4, 9, 10, \quad (9)$$

$$K_{ij} = \int_0^L EF(x)f_i'(x)f_j'(x) dx \quad i, j = 2, 8, \quad (10)$$

$$K_{ij} = \int_0^L GJ_0(x)f_i'(x)f_j'(x) dx \quad i, j = 5, 11, \quad (11)$$

$$P_i = \int_0^L q_z(x)\bar{f}_i(x) dx \quad i = 1, 6, 7, 12, \quad (12)$$

$$P_i = \int_0^L q_y(x)\bar{f}_i(x) dx \quad i = 3, 4, 9, 10. \quad (13)$$

Входящие в формулы (8)–(13) функции моментов инерции и

площадей поперечных сечений балки представляются квадратичными полиномами в следующем виде

$$J_y(x) = J1_y [a_{Jy}(x/L)^2 + b_{Jy}(x/L) + 1], \quad (14)$$

$$J_z(x) = J1_z [a_{Jz}(x/L)^2 + b_{Jz}(x/L) + 1], \quad (15)$$

$$F(x) = F1 [a_F(x/L)^2 + b_F(x/L) + 1], \quad (16)$$

$$J_0(x) = J1_0 [a_{J0}(x/L)^2 + b_{J0}(x/L) + 1], \quad (17)$$

где $J1_z$, $J1_y$, $J1_0$, $F1$ — значения характеристик поперечного сечения балки в 1-м узле; a_{Jy} , b_{Jy} , a_{Jz} , b_{Jz} , a_{J0} , b_{J0} , a_F , b_F — коэффициенты, зависящие от типа профиля, от значений характеристик поперечного сечения балки во 2-м узле и от характера изменения характерного размера сечения, например, высоты или диаметра по длине балки.

Опуская индексы, коэффициенты a и b можно вычислить по формулам

$$a = 2(J2/J1) - 4(J3/J1) + 2, \quad b = 4(J3/J1) - J2/J1 - 3, \quad (18)$$

где $J3$ — соответствующая характеристика в середине пролета балки.

Характеристики поперечного сечения балки в 1 и 2-м узлах вычисляются по заданным размерам концевых сечений. Кроме этого, вычисляются характеристики среднего сечения в предположении линейного изменения характерного размера. Функции $\omega_y(x)$, $\omega_z(x)$ принимаются постоянными и равняются их значениям для среднего сечения по длине балки.

В качестве примера в табл. 1 приведены коэффициенты квадратичной аппроксимации момента инерции при изгибе для симметричного двутавра, полый и сплошной трубы при отношении характерного размера сечения в 1 и 2-м узлах равным 2,5. На рис. 3 показаны точные кривые изменения моментов инерции по длине балки и их квадратичные аппроксимации. Видно, что наименее точно аппроксимируется квадратичным полиномом изменение момента инерции кругового профиля. Расчеты показывают, что приемлемая точность аппроксимации достигается при отношении наибольшего характерного размера профиля к наименьшему не более двух.

Таблица 1. Коэффициенты a_{Jz} и b_{Jz} для трех типов балки

Про- филь	Размеры поперечного сечения, мм			a_{Jz}	b_{Jz}
	1 узел	Середина	2 узел		
Дву- тавр	1000x15/ 200x20	700x15/ 200x20	400x15/ 200x20	0.440720	-1.29555
Труба	1000x20	700x20	400x20	0.779962	-1.72152
Круг	1000	700	400	1.09080	-2.06520

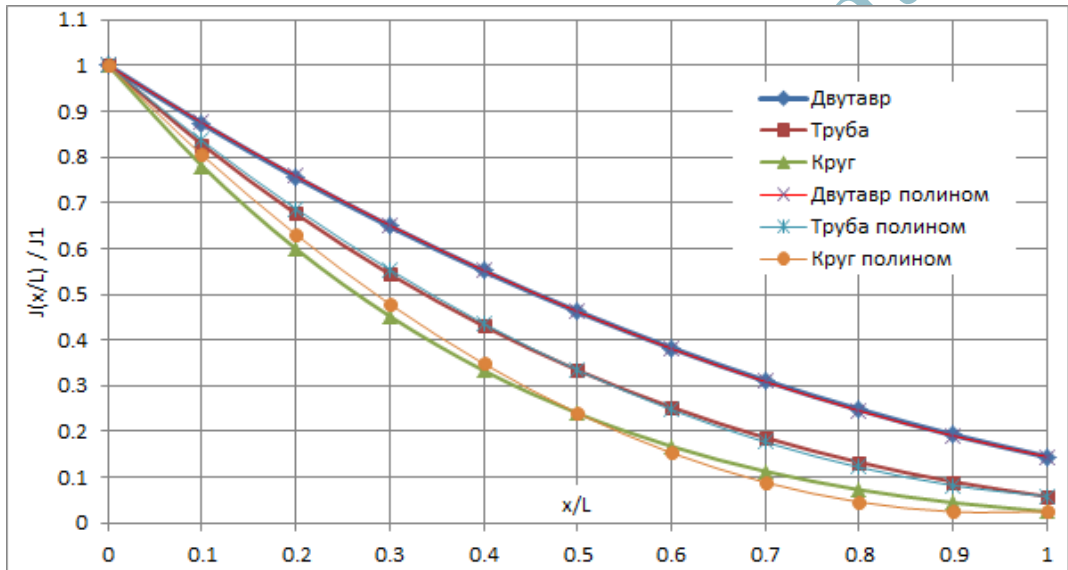


Рис. 3. Моменты инерции по длине балки и их квадратичные аппроксимации.

Ненулевые компоненты матрицы $[K]$ вычисляются по следующим выражениям, причем $K_{i,j} = K_{j,i}$:

$$K_{1,1} = \frac{6EJ_z s_z^2 (4a_{Jz} + 5b_{Jz} + 10)}{5L^3} + \frac{144Gs_z^2 \omega_z \beta_z^2}{L} + T \frac{6}{5L}$$

$$K_{1,6} = \frac{EJ_z s_z^2 (7a_{Jz} + 10b_{Jz} - 60a_{Jz}\beta_z - 60b_{Jz}\beta_z + 30)}{5L^2} + 72Gs_z^2 \omega_z \beta_z^2 + \frac{T}{10}$$

$$K_{1,12} = \frac{EJ_z s_z^2 (17a_{Jz} + 20b_{Jz} + 60a_{Jz}\beta_z + 60b_{Jz}\beta_z + 30)}{5L^2} + 72Gs_z^2 \omega_z \beta_z^2 + \frac{T}{10}$$

$$K_{2,2} = \frac{EF(2a_F + 3b_F + 6)}{6L}$$

$$K_{3,3} = \frac{6EJ_y s_y^2 (4a_{Jy} + 5b_{Jy} + 10)}{5L^3} + \frac{144Gs_y^2 \omega_y \beta_y^2}{L} + T \frac{6}{5L}$$

$$\begin{aligned}
K_{3,4} &= -\frac{EJ1_y s_y^2 (7a_{jy} + 10b_{jy} - 60a_{jy}\beta_y - 60b_{jy}\beta_y + 30)}{5L^2} - 72Gs_y^2 \omega_y \beta_y^2 - \frac{T}{10} \\
K_{3,10} &= -\frac{EJ1_y s_y^2 (17a_{jy} + 20b_{jy} + 60a_{jy}\beta_y + 60b_{jy}\beta_y + 30)}{5L^2} - 72Gs_y^2 \omega_y \beta_y^2 - \frac{T}{10} \\
K_{4,4} &= \frac{EJ1_y s_y^2 (8a_{jy} + 15b_{jy} + 360\beta_y + 720a_{jy}\beta_y^2 + 1080b_{jy}\beta_y^2 + 2160\beta_y^2 - 60a_{jy}\beta_y + 60)}{15L} + 36GLs_y^2 \omega_y \beta_y^2 + T \frac{2L}{15} \\
K_{4,10} &= -\frac{EJ1_y s_y^2 (360\beta_y - 13a_{jy} - 15b_{jy} + 720a_{jy}\beta_y^2 + 1080b_{jy}\beta_y^2 + 2160\beta_y^2 + 120a_{jy}\beta_y + 180b_{jy}\beta_y - 30)}{15L} + \\
&\quad + 36GLs_y^2 \omega_y \beta_y^2 - T \frac{L}{30} \\
K_{5,5} &= \frac{GJ1_0 (2a_{j0} + 3b_{j0} + 6)}{6L} \\
K_{6,6} &= \frac{EJ1_z s_z^2 (8a_{jz} + 15b_{jz} + 360\beta_z + 720a_{jz}\beta_z^2 + 1080b_{jz}\beta_z^2 + 2160\beta_z^2 - 60a_{jz}\beta_z + 60)}{15L} + 36GLs_z^2 \omega_z \beta_z^2 + T \frac{2L}{15} \\
K_{6,12} &= -\frac{EJ1_z s_z^2 (360\beta_z - 13a_{jz} - 15b_{jz} + 720a_{jz}\beta_z^2 + 1080b_{jz}\beta_z^2 + 2160\beta_z^2 + 120a_{jz}\beta_z + 180b_{jz}\beta_z - 30)}{15L} + \\
&\quad + 36GLs_z^2 \omega_z \beta_z^2 - T \frac{L}{30} \\
K_{10,10} &= \frac{EJ1_y s_y^2 (38a_{jy} + 45b_{jy} + 360\beta_y + 720a_{jy}\beta_y^2 + 1080b_{jy}\beta_y^2 + 2160\beta_y^2 + 300a_{jy}\beta_y + 360b_{jy}\beta_y + 60)}{15L} + \\
&\quad + 36GLs_y^2 \omega_y \beta_y^2 + T \frac{2L}{15} \\
K_{12,12} &= \frac{EJ1_z s_z^2 (38a_{jz} + 45b_{jz} + 360\beta_z + 720a_{jz}\beta_z^2 + 1080b_{jz}\beta_z^2 + 2160\beta_z^2 + 300a_{jz}\beta_z + 360b_{jz}\beta_z + 60)}{15L} + \\
&\quad + 36GLs_z^2 \omega_z \beta_z^2 + T \frac{2L}{15} \\
K_{1,7} &= -K_{1,1} \quad K_{2,8} = -K_{2,2} \quad K_{3,9} = -K_{3,3} \quad K_{4,9} = -K_{3,4} \quad K_{5,11} = -K_{5,5} \quad K_{6,7} = -K_{1,6} \\
K_{7,7} &= K_{1,1} \quad K_{7,12} = -K_{1,12} \quad K_{8,8} = K_{2,2} \quad K_{9,9} = K_{3,3} \quad K_{9,10} = -K_{3,10} \quad K_{11,11} = K_{5,5}
\end{aligned}$$

Ненулевые компоненты вектора нагрузки $\{P\}$ при линейном изменении поперечной нагрузки $q_y(x), q_z(x)$ по длине балки согласно рис. 2 имеют вид

$$\begin{aligned}
P_1 &= (7q_{1z} + 3q_{2z}) \frac{L}{20} \quad P_3 = (7q_{1y} + 3q_{2y}) \frac{L}{20} \quad P_4 = -(3q_{1y} + 2q_{2y}) \frac{L^2}{60} \quad P_6 = (3q_{1z} + 2q_{2z}) \frac{L^2}{60} \\
P_7 &= (3q_{1z} + 7q_{2z}) \frac{L}{20} \quad P_9 = (3q_{1y} + 7q_{2y}) \frac{L}{20} \quad P_{10} = (2q_{1y} + 3q_{2y}) \frac{L^2}{60} \quad P_{12} = -(2q_{1z} + 3q_{2z}) \frac{L^2}{60}.
\end{aligned}$$

Конечный элемент включен в библиотеку программы FES-ТА под именем *B4*.

НЕПРИЗМАТИЧЕСКИЕ БАЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С КРУГОВЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Безтакелажные мачты парусных судов и яхт с китайским вооружением «Джонка», нагруженные только поперечной нагрузкой, изгибаются, не испытывая сжатия и кручения. При этом они имеют круговое поперечное сечение, диаметр которого является,

как правило, линейной функцией осевой координаты. На различных участках по длине мачты сечение может быть сплошным или кольцевым с постоянной толщиной стенки. На рис. 4 изображена яхта с китайским парусом и безтакелажной конической мачтой.

Для расчета подобных мачт получен непризматический балочный конечный элемент с 4 степенями свободы, имеющий либо сплошное круговое поперечное сечение, либо кольцевое сечение с постоянной толщиной стенки. Изменение момента инерции поперечного сечения точно соответствует линейному изменению диаметра мачты по ее длине. Функции внешнего диаметра и моментов инерции конической сплошной и пустотелой балки имеют вид

$$D(x) = D_1(1 - x/L) + D_2x/L, \quad J(x) = \pi \frac{D(x)^4}{64} [1 - d(x)^4/D(x)^4], \quad (19)$$

где $d(x) = D(x) - 2t$; D_1 — диаметр сечения в 1-м узле; D_2 — диаметр сечения во 2-м узле; t — толщина стенки.

Функцию прогиба балки $w(x)$ аппроксимируем аналогично элементу B4.

$$w(x) = f_1(x)d_1 + f_2(x)d_2 + f_3(x)d_3 + f_4(x)d_4, \quad (20)$$

где

$$f_1(x) = s[1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 + 6\beta];$$

$$f_2(x) = sL[(x/L)/s - 2(x/L)^2(1 + 3\beta) + (x/L)^3 - 4\beta - 12\beta^2];$$

$$f_3(x) = s_s(3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 + 6\beta);$$

$$f_4(x) = sL[(x/L)^2(6\beta - 1) + (x/L)^3 - 2\beta + 12\beta^2];$$

$$k = EJ/G\omega; \quad \beta = k/L^2; \quad s = 1/(1 + 12\beta).$$

Жесткости EJ и $G\omega$ вычисляются для среднего сечения балки.

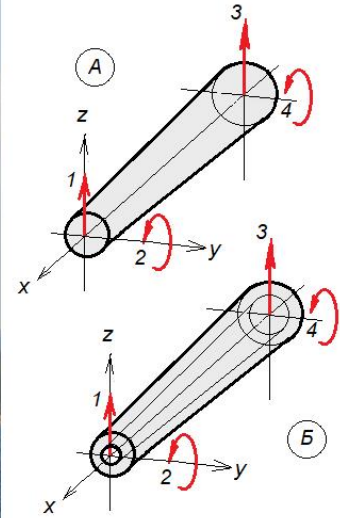


Рис. 4. Яхта с безтакелажной конической мачтой и конические элементы.

Коэффициенты симметричной матрицы жесткости конического конечного элемента балки с круговым сплошным поперечным сечением (элемент *A*) имеют вид:

$$K_{1,1} = 3\pi E s^2 (11D1^4 + 5D1^3 D2 + 3D1^2 D2^2 + 5D1 D2^3 + 11D2^4) / 560L^3 + 144Gs^2 \omega \beta^2 / L$$

$$K_{1,2} = \pi E s^2 [47D1^4 + 22D1^3 D2 + 9D1^2 D2^2 + 8D1 D2^3 + 19D2^4 + 84\beta(2D1^4 - 2D2^4 + D1^3 D2 - D1 D2^3)] / 1120L^2 + 72Gs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{1,4} = \pi E s^2 [19D1^4 + 8D1^3 D2 + 9D1^2 D2^2 + 22D1 D2^3 + 47D2^4 + 84\beta(2D2^4 - 2D1^4 - D1^3 D2 + D1 D2^3)] / 1120L^2 + 72Gs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{2,2} = \pi E s^2 [17D1^4 + 9D1^3 D2 + 4D1^2 D2^2 + 2D1 D2^3 + 3D2^4 + 252\beta^2(D1^4 + D1^3 D2 + D1^2 D2^2 + D1 D2^3 + D2^4) + 42\beta(3D1^4 + 2D1^3 D2 + D1^2 D2^2 - D2^4)] / 560L + 36GLs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{2,4} = \pi E s^2 [13D1^4 + 4D1^3 D2 + D1^2 D2^2 + 4D1 D2^3 + 13D2^4 - 504\beta^2(D1^4 + D1^3 D2 + D1^2 D2^2 + D1 D2^3 + D2^4) - 84\beta(D1^4 + D1^3 D2 + D1^2 D2^2 + D1 D2^3 + D2^4)] / 1120L + 36GLs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{4,4} = \pi E s^2 [3D1^4 + 2D1^3 D2 + 4D1^2 D2^2 + 9D1 D2^3 + 17D2^4 + 252\beta^2(D1^4 + D1^3 D2 + D1^2 D2^2 + D1 D2^3 + D2^4) + 42\beta(-D1^4 + D1^3 D2 + 2D1 D2^3 + 3D2^4)] / 560L + 36GLs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{1,3} = -K_{1,1} \quad K_{2,3} = -K_{1,2} \quad K_{3,3} = K_{1,1} \quad K_{3,4} = -K_{1,4}$$

Коэффициенты симметричной матрицы жесткости кониче-

ского конечного элемента балки с круговым кольцевым поперечным сечением (элемент B) имеют вид:

$$K_{1,1} = 3\pi E s^2 t [7D1^3 + 3D1^2 D2 + 3D1 D2^2 + 7D2^3 - 12t(2D1^2 + D1 D2 + 2D2^2) + 40t^2(D1 + D2) - 40t^3] / 40L^3 + 144Gs^2 \omega \beta^2 / L$$

$$K_{1,2} = \frac{\pi E s^2 t [15D1^3 + 6D1^2 D2 + 3D1 D2^2 + 6D2^3 + 18\beta(3D1^3 - 3D2^3 + D1^2 D2 - D1 D2^2) - t(51D1^2 + 18 D1 D2 + 21D2^2 - 180\beta D2^2 + 180\beta D1^2) + 40t^2(2D1 + D2 + 6\beta D1 - 6\beta D2) - 60t^3] / 40L^2 + 72Gs^2 \omega \beta^2}{}$$

$$K_{1,4} = \frac{\pi E s^2 t [6D1^3 + 3D1^2 D2 + 6D1 D2^2 + 15D2^3 + 18\beta(-3D1^3 + 3D2^3 - D1^2 D2 + D1 D2^2) - t(21D1^2 + 18 D1 D2 + 51D2^2 + 180\beta D2^2 - 180\beta D1^2) + 40t^2(D1 + 2D2 - 6\beta D1 + 6\beta D2) - 60t^3] / 40L^2 + 72Gs^2 \omega \beta^2}{}$$

$$K_{2,2} = \frac{\pi E s^2 t [11D1^3 + 5D1^2 D2 + 2D1 D2^2 + 2D2^3 + 12\beta(7D1^3 - 2D2^3 + 4D1^2 D2 + D1 D2^2) + 180\beta^2(D1^3 + D1^2 D2 + D1 D2^2 + D2^3) - t(38D1^2 + 14 D1 D2 + 8D2^2 + 300\beta D1^2 - 60\beta D2^2 + 120\beta D1 D2 + 720\beta^2(D1^2 + D1 D2 + D2^2)) + 20t^2(3D1 + D2 + 24\beta D1 + 72\beta^2(D1 + D2)) - 40t^3(1 + 6\beta + 36\beta^2)] / 40L + 36GLs^2 \omega \beta^2}{}$$

$$K_{2,4} = -\pi E s^2 t (D1 + D2 - 2t) [(D1^2 + D2^2)(-4 + 30\beta + 180\beta^2) + 5t(D1 + D2 - 2t)(1 - 12\beta - 72\beta^2)] / 40L + 36GLs^2 \omega \beta^2$$

$$K_{4,4} = \frac{\pi E s^2 t [2D1^3 + 2D1^2 D2 + 5D1 D2^2 + 11D2^3 - 12\beta(2D1^3 - 7D2^3 - D1^2 D2 - 4D1 D2^2) + 180\beta^2(D1^3 + D1^2 D2 + D1 D2^2 + D2^3) - t(8D1^2 + 14 D1 D2 + 38D2^2 - 60\beta D1^2 + 300\beta D2^2 + 120\beta D1 D2 + 720\beta^2(D1^2 + D1 D2 + D2^2)) + 20t^2(D1 + 3D2 + 24\beta D2 + 72\beta^2(D1 + D2)) - 40t^3(1 + 6\beta + 36\beta^2)] / 40L + 36GLs^2 \omega \beta^2}{}$$

$$K_{1,3} = -K_{1,1} \quad K_{2,3} = -K_{1,2} \quad K_{3,3} = K_{1,1} \quad K_{3,4} = -K_{1,4}$$

Компоненты вектора узловой нагрузки $\{P\}$ при линейном изменении поперечной нагрузки $q(x)$ по длине балки имеют вид:

$$P_1 = (7q_1 + 3q_2) \frac{L}{20} \quad P_2 = (3q_1 + 2q_2) \frac{L^2}{60} \quad P_3 = (3q_1 + 7q_2) \frac{L}{20} \quad P_4 = -(2q_1 + 3q_2) \frac{L^2}{60}$$

ВЕРИФИКАЦИЯ

Тестирование полученных конечных элементов было выполнено на задаче об изгибе безтакелажной мачты с переменным круговым сечением (рис. 5).

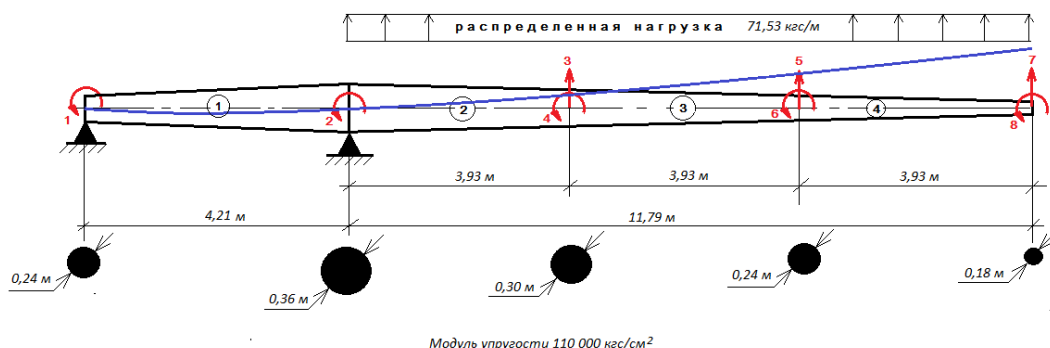


Рис. 5. Безтакежная коническая мачта.

Надпалубная конусная часть мачты длиной 11,79 м нагружена равномерно распределенной нагрузкой от паруса, подпалубная конусная часть длиной 4,21 м не нагружена. Рассмотрены варианты со сплошным и с кольцевым поперечным сечением с толщиной стенки 50 мм. Аналитическое решение получено интегрированием линейных дифференциальных уравнений изгиба и сдвига непризматической балки, т. к. наибольший угол поворота оси мачты не превышает 0,07 рад. Конечно-элементная модель мачты включает четыре элемента. В табл. 2 приведены прогибы топа мачты и погрешность по отношению к аналитическому решению при ее моделировании различными балочными конечными элементами в различных программах. Приведены результаты для непризматических элементов, а также для приближенного представления конструкции призматическими элементами, для которых размеры сечений принимались равными размерам сечения мачты в середине длины элемента. В скобках указано решение без учета деформаций сдвига. При учете сдвига в элементах B2, B4 программы FESTA и элементов A и B, реализованных в вычислительном комплексе Mathcad, площадь, сопротивляющаяся сдвигу, принята равной 90% и 70% от площади сплошного и кольцевого сечения соответственно.

Таблица 2. Прогиб топа безтакежной мачты, мм

Анали-	Конечные элементы, программы
--------	------------------------------

тиче- ское решение	Непризматические				
	<i>B4</i> FESTA	<i>A, B</i> Mathcad	<i>BEAM188</i> ANSYS	<i>B31</i> ABAQUS	<i>CBEAM</i> NX NAS- TRAN
(458,88) ● 459,44	(456,06) -0,62 %	(456,37) -0,55 %	(459,94) +0,23 %	(471,9) +2,8 %	(430,1) -6,3 %
	456,27 -0,69 %	456,62 -0,61 %	460,52 +0,24 %	518,4 +12,8 %	430,8 -6,2 %
(585,41) ○ 586,81	(582,53) -0,49 %	(582,74) -0,46 %	(587,87) +0,42 %	(625,9) +6,9 %	(559,3) -4,5 %
	583,30 -0,60 %	583,51 -0,56 %	588,70 +0,32 %	710,9 +21,1 %	561,3 -4,3 %
Анали- тиче- ское решение	Призматические				
	<i>B2</i> FESTA	<i>BEAM188</i> ANSYS	<i>B31</i> ABAQUS	<i>CBEAM</i> NX NAS- TRAN	
(458,88) ● 459,44	(536,37) +16,9 %	(537,69) +17,2 %	(489,4) +6,7 %	(536,37) +16,9 %	
	537,09 +16,9 %	538,24 +17,2 %	538,8 +17,3 %	537,10 +16,9 %	
(585,41) ○ 586,81	(671,98) +14,8 %	(673,95) +15,12 %	(613,4) +4,8 %	(671,97) +14,8 %	
	673,62 +14,8 %	675,52 +15,12 %	697,4 +18,8 %	674,01 +14,9 %	

Из табл. 2 видно, что предлагаемые элементы *B4*, *A* и *B* обладают заметно лучшей сходимостью в сравнении с аппроксимацией призматическими элементами и даже в сравнении с некоторыми известными непризматическими элементами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1. Сравнение универсального элемента *B4* с элементами *A* и *B* показывает его хорошую сходимость и пригодность для расчетов при отношении наибольшего характерного размера поперечного сечения к наименьшему не более двух.
2. Приближенный учет малых деформаций поперечного сдвига в непризматических элементах *B4*, *A* и *B* при расчетах удлиненных балок и балочных систем оправдан.
3. Среди существующих непризматических балочных элементов с опцией *Taper sections* наиболее точным является элемент *BEAM188* в программе ANSYS. Подобные элементы в программах ABAQUS и NX NASTRAN обладают существенно меньшей точностью, чем *BEAM188* и предлагаемые элементы *B4*, *A* и *B*.

Приведенные в явном виде непризматические балочные конечные элементы позволяют сократить время моделирования, избежать неоднозначности моделирования реальной геометрии конструкций призматическими элементами, сократить объем исходной информации и повысить точность определения НДС при расчетах прочности и устойчивости тросово-балочных систем «рангоут – стоячий такелаж» парусных судов и яхт, а также других объектов техники.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Вклад авторов. Александр В. Кульцеп – поиск публикаций, проведение вычислений, утверждение финальной версии рукописи; Вадим А. Манухин – написание текста рукописи, редактирование текста рукописи, создание изображений, поиск публикаций, экспертная оценка, проведение вычислений, утверждение финальной версии рукописи. Все авторы одобрили рукопись (версию для публикации) и согласились нести ответственность за все аспекты работы, гарантируя надлежащее рассмотрение и решение вопросов, связанных с точностью и добросовестностью любой ее части.

Источники финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

Конфликт интересов. Авторы гарантируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Оригинальность. При создании настоящей работы авторы не использовали ранее опубликованные сведения (текст, иллюстрации, данные).

Генеративный искусственный интеллект. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Рассмотрение и рецензирование. Настоящая работа подана в журнал в инициативном порядке и рассмотрена по обычной процедуре.

ADDITIONAL INFO

Authors contributions. Alexander V. Kul'tsep – search for publications, calculations, and approval of the final version of the manuscript; Vadim A. Manukhin – writing the manuscript, editing the manuscript, creating images, searching for publications, expert evaluation, calculations, and approval of the final version of the manuscript. All the authors approved the version of the draft to be published and agreed to be accountable for all aspects of the work, ensuring that issues related to the accuracy or integrity of any part of the work are appropriately investigated and resolved.

Funding sources: No funding.

Disclosure of interests: The authors have no relationships, activities or interests for the last three years related with for-profit or not-for-profit third parties whose interests may be affected by the content of the article.

Statement of originality: In preparing this work, the authors did not use previously published material (text, illustrations, or data).

Generative AI: Generative AI technologies were not used in the preparation of this article.

Provenance and peer-review: This work was submitted to the journal on the authors' own initiative and processed under the standard procedure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миддендорф Ф.Л. Рангоут и такелаж судов. СПб: 1905.
2. ТУ110.001. Технические условия. Стальной рангоут и такелаж классических парусных судов. Проектирование, изготовление, эксплуатация. Одобрено ГУ РМРС 14.05.2024. СПб РСОО «Яхт-клуб Санкт-Петербурга», 2024.
3. НД № 2-020401-001. Правила проектирования, постройки, ремонта и эксплуатации спортивных парусных судов, а также изготовления материалов и изделий для установки на спортивных парусных судах. СПб: РМРС, 2010.
4. Design and Construction of Large Modern Yacht Rigs. DNVGL-ST-0412. DNV GL, 2016.
5. Guidance Notes for the Certification of Masts, Spars and Standing Rigging. Lloyd's Register, 2016.
6. Правила классификации и постройки морских яхт. Часть VII. Рангоут и такелаж. Гданьск: Польский Судовой Регистр (PRS), 2008.
7. Кульцеп А.В., Манухин В.А., Меллуп А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния мачты парусной яхты в районе вертлюга гика // Труды СПбГМТУ. №3, СПб: СПбГМТУ, 2022. С. 22–34. doi: 10.52899/24141437_2022_03_22 EDN: АПНО
8. Кульцеп А.В. Проектирование мачт парусных судов. В кн.: Сб. тр. СПбГМТУ. СПб: СПбГМТУ, 1995. С. 90–96.
9. Кульцеп А.В., Манухин В.А., Новожилова М.В. Методика расчета гибких тросово-стержневых систем на прочность и устойчивость. В кн.: Тез. докл. конф. по СМК памяти проф. П.Ф. Папковича. СПб.: ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова, 2000. С. 93–94.
10. Кульцеп А.В., Манухин В.А., Новожилова М.В. Алгоритм расчетного проектирования рангоута и стоячего такелажа парусных судов и яхт при использовании компьютерных программ «MAST» и «FESTA», разработанных в Санкт-Петербургском государственном морском техническом университете. В кн.: Тез. докл. конф. «Бубновские чтения», посвящ. 100-летию кафедры СМК СПбГМТУ. СПб: ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова, 2004. С. 83–84.
11. Манухин В.А. О надежности мачт парусных судов и яхт. В кн.: Тез. докл. конф. по СМК памяти акад. Ю.А.Шиманского. СПб: ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова, 2008. С. 82–83.
12. Кульцеп А.В., Манухин В.А. Методика проектирования и назначение коэффициентов запаса прочности и устойчивости мачт парусных судов и яхт. Морские интеллектуальные технологии. СПб: НИЦ МОРИНТЕХ, 2011. Спец. выпуск № 2. С. 65–67.

13. Кульцеп А.В., Манухин В.А., Плотников К.В., и др. Модернизация программы конечно-элементного анализа стержневых систем «FESTA-2020» для использования в автоматизированной системе проектирования судовых конструкций «АЛМАЗ-К». В кн.: Труды КГНЦ, СПб: ФГУП КГНЦ им. акад. А.Н.Крылова, 2020. Спец. выпуск № 2. С. 97–102.
14. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974.

REFERENCES

1. Middendorf FL. *Rigging and Tackle of Ships*. St. Petersburg; 1905. (In Russ.)
2. TU 110.001. Technical Specifications. Steel Spars and Rigging of Classic Sailing Vessels. Design, Manufacturing, Operation]. Approved by GU RMRS 05/14/2024. St. Petersburg: RSOO "Yacht-Club of St. Petersburg"; 2024. (In Russ.)
3. ND No. 2-020401-001. Rules for the Design, Construction, Repair and Operation of Sports Sailing Vessels, as well as the Manufacture of Materials and Products for Installation on Sports Sailing Vessels. St. Petersburg: RMRS; 2010. (In Russ.)
4. DNV GL. *Design and Construction of Large Modern Yacht Rigs*. DNVGL-ST-0412. 2016.
5. Lloyd's Register. *Guidance Notes for the Certification of Masts, Spars and Standing Rigging*. 2016.
6. Polski Rejestr Statkow (PRS). *Rules for the Classification and Construction of Sea-Going Yachts. Part VII. Spars and Rigging*. Gdansk: Polish Register of Shipping; 2008.
7. Kul'tsep AV, Manukhin VA, Mellup AA. Study of the stress-strain state of a sailing yacht mast in the area of the boom gooseneck. *Trudy SPbGMTU*. 2022;(3):22–34. doi: 10.52899/24141437_2022_03_22 EDN: AIIOHO
8. Kultsep AV. Design of masts for sailing vessels. In: *Collection of Works of SPbSMTU*. St. Petersburg: SPbGMTU; 1995:90–96. (In Russ.)
9. Kultsep AV, Manukhin VA, Novozhilova MV. Method for calculating the strength and stability of flexible cable-rod systems. In: *Abstracts of the Conference on Structural Mechanics and*

- Ship Hull Strength in Memory of Prof. P.F. Papkovich*. St. Petersburg: TsNII im. akad. A.N. Krylova; 2000:93–94. (In Russ.)
10. Kultsep AV, Manukhin VA, Novozhilova MV. Algorithm for computational design of spars and standing rigging of sailing vessels and yachts using the computer programs "MAST" and "FESTA" developed at the St. Petersburg State Marine Technical University. In: *Abstracts of the Conference "Bubnov Readings", dedicated to the 100th anniversary of the Department of Structural Mechanics and Ship Hull Strength of SPbSMTU*. St. Petersburg: TsNII im. akad. A.N. Krylova; 2004:83–84. (In Russ.)
 11. Manukhin VA. On the reliability of masts of sailing vessels and yachts. In: *Abstracts of the Conference on Structural Mechanics and Ship Hull Strength in Memory of Academician Yu.A. Shimansky*. St. Petersburg: TsNII im. akad. A.N. Krylova; 2008:82–83. (In Russ.)
 12. Kultsep AV, Manukhin VA. Design methodology and assignment of safety factors for strength and stability of masts of sailing vessels and yachts. *Morskije intellektual'nye tekhnologii*. 2011;Spec No. 2:65–67. (In Russ.)
 13. Kultsep AV, Manukhin VA, Plotnikov KV, et al. Upgrading the "FESTA-2020" finite element analysis program for rod systems for use in the "ALMAZ-K" automated ship design system. In: *Trudy KGNTs*. St. Petersburg: FGUP KGNTs im. akad. A.N. Krylova; 2020;Spec No. 2:97–102. (In Russ.)
 14. Postnov VA, Kharkhurim IY. *The Finite Element Method in the Analysis of Ship Structures*. Leningrad: Sudostroenie; 1974. (In Russ.)

ОБ АВТОРАХ

Кульцеп Александр Владимирович; e-mail:
akultsep@cvs.spb.su

***Манухин Вадим Анатольевич**, канд. техн. наук, доцент; адрес: Россия, 190121, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская,

AUTHORS INFO

Alexander V. Kultsep; e-mail:
akultsep@cvs.spb.su

Vadim A. Manukhin, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor; address: 3 Lotsmanskaya st, Saint Petersburg, Russia, 190121;

д. 3; ORCID: 0000-0001-9064-
179X; eLibrary SPIN: 8615-
4549; e-mail: nikaL6@mail.ru

ORCID: 0000-0001-9064-179X;
eLibrary SPIN: 8615-4549; e-
mail: nikaL6@mail.ru

* Автор, ответственный за переписку / Corresponding author

Accepted for publication