

Разработка и исследование численных методов математического моделирования процесса ползучести костной ткани

И.И. Бакиров

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Исследование ползучести костной ткани является важной задачей в биомеханике, поскольку позволяет понять ее поведение под длительной нагрузкой. Традиционные методы оценки параметров кривой ползучести (a_1, n, α) часто основываются на классическом методе наименьших квадратов (МНК), который не учитывает возможную автокорреляцию ошибок измерений. Это приводит к снижению точности оценок и их чувствительности к экспериментальным погрешностям. В связи с этим возникает необходимость в применении более совершенных статических методов, таких как обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК), позволяющий корректировать автокорреляцию и гетероскедастичность ошибок.

Цель — повышение точности оценки параметров кривой ползучести костной ткани (a_1, n, α) за счет учета автокорреляции ошибок измерений. Для этого предлагается переход от классического МНК к ОМНК с коррекцией автокорреляции первого порядка (AR(1)), что позволит улучшить надежность и достоверность получаемых результатов.

Методы. В исследовании использовались следующие методы:

1. Обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) — применялся вместо классического МНК для учета корреляции и непостоянства дисперсии ошибок.
2. Коррекция автокорреляции AR(1) — учитывала зависимость между последовательными ошибками измерений.
3. Метод Ньютона–Гаусса — использовался для решения нелинейной регрессионной задачи и нахождения оптимальных оценок параметров.
4. Статистический анализ остатков — включал проверку на автокорреляцию и гетероскедастичность с помощью критерия Дарбина–Уотсона.

Результаты. Экспериментальные данные по ползучести костной ткани продемонстрировали значимую автокорреляцию ошибок измерений, что делает классический МНК статистически несостоятельным. Анализ остатков модели, построенной с использованием классического метода наименьших квадратов (МНК), выявил статистически значимую положительную автокорреляцию первого порядка, что подтверждается низким значением статистики Дарбина–Уотсона ($DW \approx 0,48$). Такой уровень автокорреляции свидетельствует о систематической ошибке в предсказаниях модели и делает оценки параметров кривой ползучести (a_1, n, α) несостоятельными в рамках МНК.

Для устранения этих недостатков была применена модель на основе обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) с коррекцией автокорреляции первого порядка AR(1). Для оценивания нелинейной зависимости между временем и деформацией ползучести использовался метод Ньютона–Гаусса, обеспечивающий сходимость к глобальному минимуму целевой функции. Все вычислительные эксперименты проводились на модельных данных, сгенерированных на основе аналитического решения кривой ползучести. К исходным данным добавлялась случайная помеха с уровнем 5 % от среднего значения, имитирующая реальные погрешности измерений. Это позволило протестировать устойчивость предложенного подхода к шумам в экспериментальных данных.

После применения ОМНК с AR(1)-коррекцией значение статистики Дарбина–Уотсона повысилось до уровня $DW \approx 1,77$, что указывает на отсутствие существенной автокорреляции в остатках и подтверждает

адекватность скорректированной модели. Также наблюдалось уменьшение среднеквадратичной ошибки проога примерно в три раза по сравнению с классическим МНК.

Анализ точности оценок параметров показал, что относительная погрешность определения параметра a_1 снизилась с 40,9 до 15,5 %, параметра n — с 0,76 до 0,41 %, а параметра α — с 0,84 до 0,65 %. Это свидетельствует о значительном повышении точности и устойчивости оценок, полученных на основе предлагаемого подхода.

Также были проведены численные эксперименты по сравнению качества подгонки моделей: графическое представление теоретических кривых ползучести поверх экспериментальных данных наглядно демонстрирует более точное совпадение в случае использования ОМНК с AR(1).

Выводы. Предложенный численно-аналитический алгоритм на основе обобщенного метода наименьших квадратов с коррекцией автокорреляции позволил существенно повысить точность оценивания параметров кривой ползучести костной ткани.

Ключевые слова: ползучесть костной ткани; обобщенный метод наименьших квадратов; автокорреляция ошибок; статистический анализ остатков; точность оценки параметров.

Сведения об авторе:

Ильназ Ильдусович Бакиров — студент, группа 4-ИАИТ-110; институт автоматизации и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: bakirov.ilnaz00@mail.ru

Сведения о научном руководителе:

Владимир Евгеньевич Зотеев — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика»; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: zoteev-ve@mail.ru