

Исследование скорости сходимости ускоренных блочных вариантов строчно-ориентированной формы регуляризованного алгоритма Качмажа

А.Д. Сиротин

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Классический алгоритм Качмажа и его регуляризованные модификации обладают предельно простой алгоритмической структурой, что делает их удобным инструментом для решения прикладных задач больших размерностей, таких как обработка изображений, машинное обучение и восстановление сигналов. Однако, несмотря на концептуальную ясность и вычислительную доступность, эти алгоритмы страдают низкой скоростью сходимости.

Цель — разработка, исследование и программная реализация ускоренных блочных вариантов строчно-ориентированной формы регуляризованного алгоритма Качмажа.

Методы. Для регуляризованной формы алгоритма Качмажа ключевым этапом является вычисление псевдообратной матрицы, что определяет общую вычислительную сложность метода. В работе [1] используется итерационный алгоритм Бен-Израэля для вычисления псевдообратной матрицы:

$$X_{k+1} = X_k [2E - AX_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Этот метод учитывает специфическую структуру расширенной матрицы системы [2] и позволяет эффективно использовать современные высокопроизводительные вычислительные платформы.

Рассмотрим методы ускорения процедуры вычисления псевдообратной матрицы. Так, Тутунян и Солеймани [3] предложили метод четвертого порядка, требующий пять операций умножения матриц:

$$X_{k+1} = 0.5X_k (9E - AX_k (16E - AX_k (14E - AX_k (6E - AX_k))))). \quad (2)$$

Кришнамурти и Сен [3] представили альтернативный метод четвертого порядка, включающий четыре операции умножения матриц:

$$X_{k+1} = X_k (E + Y_k (E + Y_k (E + Y_k))), \quad Y_k = E - AX_k. \quad (3)$$

Другим эффективным способом ускорения сходимости алгоритма является этап препроцессинга. Линейную систему $Au = f$ можно преобразовать в эквивалентную систему $QAU = Qf$. При этом матрица Q определяется как:

$$Q = HD,$$

где H — матрица Адамара, D — диагональная матрица размером $m \times m$, элементы которой случайным образом принимают значения $\pm 1 / \sqrt{m}$.

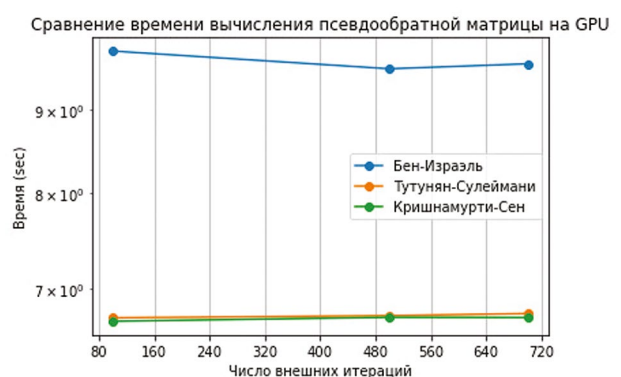
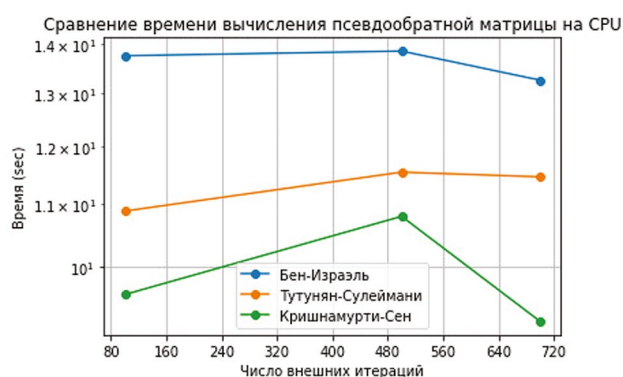


Рис. 1. Тестовая задача с матрицей $A^{4096 \times 4096}$

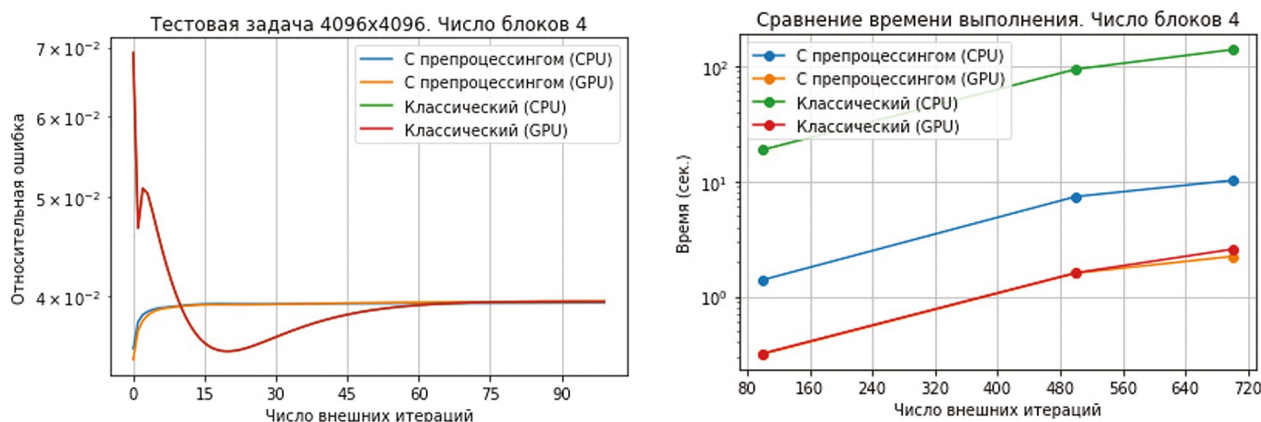


Рис. 2. Тестовая задача с матрицей $A^{4096 \times 4096}$. Число блоков 4

Результаты. На рис. 1 представлены графики сравнения времени вычисления псевдообратной матрицы для методов (1)–(3), примененных к матрице $A^{4096 \times 4096}$ на CPU и GPU.

На рис. 2 приведены графики, демонстрирующие сравнение относительной ошибки и времени выполнения классического алгоритма и его версии с препроцессингом для матрицы $A^{4096 \times 4096}$.

Выводы. Анализ методов ускорения вычислительного процесса показывает, что применение методов (2) и (3) обеспечивает лишь умеренное сокращение времени вычисления псевдообратной матрицы, но требует дополнительных вычислительных ресурсов. Это ограничивает их эффективность при обработке больших объемов данных и высокоразмерных систем. Напротив, алгоритм с этапом препроцессинга демонстрирует существенное преимущество, снижая время выполнения расчетов в 14,5 раз. Этот результат подтверждает, что предварительная обработка данных и оптимизация вычислительных структур играют ключевую роль в повышении скорости работы алгоритма.

Ключевые слова: строчно-ориентированная форма; регуляризация; алгоритм Качмажа; псевдообратная матрица; итерационный алгоритм Бен-Израэля; препроцессинг.

Список литературы

1. Derezhinski M., Needell D., Rebroya E., Yang J. Randomized Kaczmarz Methods with Beyond-Krylov Convergence. 2025. 41 p. doi: 10.48550/arXiv.2501.11673
2. Сидоров Ю.В. Итерационные методы регуляризации в регрессионном моделировании и обработке цифровых данных. Самара, 2022. 120 с. EDN: NVMJOI
3. Esmaeili H., Erfanifar R., Rashidi M. A fourth-order iterative method for computing the moore-penrose inverse // Journal of Hyperstructures. 2017. Vol. 6, N 1. P. 52–67.

Сведения об авторе:

Алексей Дмитриевич Сиротин — студент, группа 2-ИАИТ-110М, институт автоматизации и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: sad17052001@gmail.com

Сведения о научном руководителе:

Юрий Вячеславович Сидоров — кандидат физико-математических наук, доцент; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: sidorov.yv@samgtu.ru